基于傅里叶级数的信号还原及信号还原在量子力学中的一个应用

（Signal restoration based on Fourier series and an application of signal restoration on quantum mechanics）

何哲宇 孟祥琳 夏桪

(人大附中 Alevel 高二三班 北京)

指导教师：刘卓军

摘要:本文以傅里叶级数作为基础,对于已知有限个点的位置的信号进行了还原。接着对于没有精确信号测量的信号进行了还原。最后，对于信号还原在量子力学中的一个应用（对于在一维运动时入射势能垒的粒子能量本征函数函数进行计算）进行了讨论。

Abstract: In this paper, we use Fourier series as basis to restore signals for which only limited number of amplitude measurements at different values of the independent variable are known. After that, we obtained a method of restoring signals of non-precise measurements. At the final, we discussed an application of signal restoration on quantum mechanics(calculation of the energy eigenfunction of particles entering a potential barrier when moving in a one dimension path).

第一章：具有精确信号测量的连续信号还原

设一个周期 T 已知的周期信号，可取其振幅值为傅里叶级数：

$$x = f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \mathrm{nw_0 t} + b_n \sin \mathrm{nw_0 t})$$

其中

$$\mathrm{w_0} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{a_0} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{xdt}\ \text{为平均振幅}$$

$$\mathrm{a_n} = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x} \cos \mathrm{nw_0 t\, dt}$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x} \sin \mathrm{nw_0 t\, dt}$$

不难看出，得出周期信号的函数，需要对至少一个周期的图像有确切的掌握，但当对于信号的掌握仅限于有限个点时，则不能解出精确的$\mathrm{a_n}$和$\mathrm{b_n}$。此时，不妨取信号为有限个频率不同的正弦及余弦函数的和：

$$\mathrm{x} = a_0 + \sum_{n=1}^{K} (a_n \cos \mathrm{nw_0 t} + b_n \sin \mathrm{nw_0 t}) + \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \begin{cases} a_{K+1} \cos(\mathrm{K}+1)\mathrm{w_0 t}, & \mathrm{N}-1\ \text{为奇} \\ 0, & \mathrm{N}-1\ \text{为偶} \end{cases}$$

$$\mathrm{N} = \begin{cases} 2\mathrm{K}+2, & \mathrm{N}-1\ \text{为奇} \\ 2\mathrm{K}+1, & \mathrm{N}-1\ \text{为偶} \end{cases}$$

其中 N 为所取的信号总数。设这些信号为：

$$\mathrm{f(t_1) = x_1}$$
$$\mathrm{f(t_2) = x_2}$$
$$\mathrm{f(t_3) = x_3}$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{f(t_N) = x_N}$$

下面根据 N 的奇偶性进行分别讨论。若 N 为偶：

$$\mathrm{a_0 + a_1 \cos w_0 t + b_1 \sin w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + b_2 \sin 2w_0 t + \cdots + a_{\frac{N-2}{2}} \cos \frac{N-2}{2} w_0 t}$$
$$\mathrm{+ b_{\frac{N-2}{2}} \sin \frac{N-2}{2} w_0 t + a_{\frac{N}{2}} \cos \frac{N}{2} w_0 t = x}$$

可得

$$a_0+a_1\cos w_0t_1+b_1\sin w_0t_1+a_2\cos 2w_0t_1+b_2\sin 2w_0t_1+\cdots+a_{\frac{N-2}{2}}\cos\frac{N-2}{2}w_0t_1$$
$$+b_{\frac{N-2}{2}}\sin\frac{N-2}{2}w_0t_1+a_{\frac{N}{2}}\cos\frac{N}{2}w_0t_1=x_1$$
$$a_0+a_1\cos w_0t_2+b_1\sin w_0t_2+a_2\cos 2w_0t_2+b_2\sin 2w_0t_2+\cdots+a_{\frac{N-2}{2}}\cos\frac{N-2}{2}w_0t_2$$
$$+b_{\frac{N-2}{2}}\sin\frac{N-2}{2}w_0t_2+a_{\frac{N}{2}}\cos\frac{N}{2}w_0t_2=x_2$$

.

.

.

$$a_0+a_1\cos w_0t_N+b_1\sin w_0t_N+a_2\cos 2w_0t_N+b_2\sin 2w_0t_N+\cdots+a_{\frac{N-2}{2}}\cos\frac{N-2}{2}w_0t$$
$$+b_{\frac{N-2}{2}}\sin\frac{N-2}{2}w_0t+a_{\frac{N}{2}}\cos\frac{N}{2}w_0t=x_N$$

设$a_n=l_{2n-1}$(除a_0外），$b_n=l_{2n}$，则有

$$\begin{bmatrix}1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_1\\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_2\\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_3\\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_N\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_0\\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ \vdots\\ l_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}$$

$$设\begin{bmatrix}1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_1\\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_2\\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_3\\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_n & \cos 2w_0t_n & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4\end{bmatrix}=K$$

并设该 N 阶行列式的值为$|K|=A$。

又设：$\begin{bmatrix} x_1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_1 \\ x_2 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_2 \\ x_3 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_3 \\ x_4 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_N \end{bmatrix}$ $=M_1$

=

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_1 \\ 1 & x_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_2 \\ 1 & x_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_3 \\ 1 & x_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_N \end{bmatrix} = M_2$$

.

.

.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & x_2 \\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & x_3 \\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & x_N \end{bmatrix} = M_N$$

即用列$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix}$替代矩阵 K 的第 a 列，则形成的新矩阵序号为$M_a$。这种新形成的正方形矩阵一共有 N 个。根据线形方程的求解方法，可得

$$a_0=\frac{|M_1|}{A}$$
$$l_1=\frac{|M_2|}{A}$$
$$l_2=\frac{|M_3|}{A}$$
$$\vdots$$
$$l_{N-1}=\frac{|M_N|}{A}$$

这样，就求出了各个谐波之前的系数及平均振幅。

下面讨论 N 为奇数的情况：

与 N 为偶数的情况类似，N 为奇数时各个谐波前的系数与平均振幅a_0也可用行列式解线形方程的方法求出。但这时矩阵K变为

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_1 \\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_2 \\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_3 \\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_N \end{bmatrix}=K$$

同样可得出矩阵M_a为列$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix}$代替 A 的第 a 列所形成。而计算平均振幅以及各个谐波之前的系数的方法同样为

$$a_0=\frac{|M_1|}{A}$$
$$l_1=\frac{|M_2|}{A}$$
$$l_2=\frac{|M_3|}{A}$$
$$\vdots$$
$$l_{N-1}=\frac{|M_N|}{A}$$

以上即为具有精确信号测量的连续信号还原方法。这一方法合理的依据为

1.该方法还原出的信号精确地经过每一个测量点。

2.当以各个谐波的系数作为自变量时，各个自变量之间不存在高度的相关性（即无多重共线性），因此可用解线形方程的方法计算系数。

3.该方法还原出的信号具有与已知周期相同的周期。

4.该信号的表达式满足傅里叶级数的形式。虽然是有限重的谐波叠加，但满足

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x\mathrm{d}t$$

$$a_n = l_{2n-1} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x \cos n w_0 t \, dt$$

$$b_n = l_{2n} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x \sin n w_0 t \, dt$$

第二章：具有不精确信号测量的连续信号还原

设，对于一个信号 x，有测量

$t=t_1$	$x=x_{f1}$
$t=t_2$	$x=x_{f2}$
…	…
$t=t_N$	$x=x_{fN}$

所做的测量数目同样为 N。

设 $x_f = \begin{bmatrix} x_{f_1} \\ x_{f_2} \\ x_{f_3} \\ x_{f_4} \\ \vdots \\ x_{f_N} \end{bmatrix}$ 所对应的精确理论值为 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$，则设一矩阵 $d = x - x_f = \begin{bmatrix} x_1 - x_{f_1} \\ x_2 - x_{f_2} \\ x_3 - x_{f_3} \\ x_4 - x_{f_4} \\ \vdots \\ x_N - x_{f_N} \end{bmatrix}$

矩阵 d 表示的是各个测量值与理论值的差别。

假定信号的周期 T 已知，在t_a所做的测量值误差范围为$\pm e_a$（a=1，2，3…），则所还原出的信号应满足

当

$$\left(e_1 = e_2 = \cdots = e_N\right)$$

时，则应有

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{fn}) \approx 0$$

这是因为测量值误差呈对称状分布，当测量值足够多时（多到可以精确地还原一个信号时），某一误差总能找到与跟其相对称的误差距离很近的误差值；因此，实际误差值的求和应与 0 相近。在理论上的计算时应取。

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{fn}) = 0$$

即矩阵 d 各项的和为 0。

而当每个测量点的误差范围不相同时，也应有这一基本的假设：测量值发生在 z 值的概率仅与 z 与理论值差的绝对值与该测量值所对应自变量取值中一半误差范围的比值有关。由于有着上下波动的误差范围是随机错误所致，又可假定测量值与理论值的差得某一值满足正态分布。

下面，将分两种情况进行讨论对于信号的还原。

第一种情况为，所有测量的自变量值满足

$$t_m + kT \neq t_n$$
$$m = 1, 2, 3 \cdots$$
$$k = 1, 2, 3 \cdots$$
$$n = 1, 2, 3 \cdots$$

T 即为已知的信号周期。上式意义为，测量所取的自变量值中，没有任意两个间的距离为周期的整数倍。这时，所还原的信号应为一个信号范围。因此，需要确定信号的上界和下界。在这一过程中，为了满足各误差范围相同时实际误差值和为 0，并且测量值与理论值的差得某一值的概率满足正态分布，要先求出正态分布的函数解析式：

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

其中 z 为绝对误差值。由于误差范围已知，而正态分布实际为一个自变量取值无限制的函数，可知误差范围并非函数的取值范围，而是满足在误差范围内正态分布曲线下的面积与 1 十分相近的值。又由于没有足够的已知值来计算精确的标准差，不妨取误差范围的一半为 3 倍标准差。这样，曲线下的面积大概为 0.9987。因此可得：

$$f(z) = \frac{1}{\frac{e_a}{3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(\frac{e_a}{3})^2}} = \frac{e_a}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_a^2 z^2}{18}}$$

根据正态分布的标准化变换，当

$$u = \frac{z - \mu}{\sigma}$$

时，u 可根据高斯分布的积分结果进行概率计算。在这里，平均值μ 为 0（因为分布是关于理论值对称的，而理论值的绝对误差值为 0）, 而标准差满足

$$\sigma = \frac{e_a}{3}$$

因此有

$$u = \frac{ze_a}{3}$$

现在把误差范围的一半当作常量处理。高斯分布的函数解析式为

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

设有值

$$\int_{-3}^{v_1} \varphi(u)du = \int_{v_1}^{v_2} \varphi(u)du = \int_{v_2}^{v_3} \varphi(u)du = \cdots = \int_{v_{N-2}}^{3} \varphi(u)du$$

求这些值的方法为：

当 N 为偶数时，在标准正态分布的数值表上读$\frac{N-2}{2}$个值，第一个值所对应的面积值A_1需要满足等式$A_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2N}$, 而接下来每一个值所对应的面积值都比其右方下一个值所对应的面积值少$\frac{1}{N}$, 一直取到第$\frac{N-2}{2}$个值（该值所对应的面积值应与 3 所对应的面积值差$\frac{1}{N}$）。取完这$\frac{N-3}{2}$

个值后，求出它们的负值，并从左至右依次编号，即可得$v_1,v_2 \dots v_{N-2}$，加上 3 和-3 即可求出所有的 u 值。

当 N 为奇数时，在标准正态分布数值表上取$\frac{N-3}{2}$个值，第一个值所有对应的面积值A_1满足$A_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{N}$，而接下来每一个值所对应的面积值都比其右方下一个值所对应的面积值少$\frac{1}{N}$，一直取到第$\frac{N-3}{2}$个值(该值所对应的面积值应与 3 所对应的面积值差$\frac{1}{N}$)。取完这$\frac{N-3}{2}$个值后，求出它们的负值，并从左至右依次编号，即可得$v_1,v_2 \dots v_{N-2}$，加上 3，-3 和 0 即可求出所有的 u 值。

并且由于

$$z=\frac{3u}{e_a}$$

可根据$-3,v_1,v_2 \dots v_{N-1},3$这一个个 u 值求出一个个 z 值。设$-3,v_1,v_2 \dots v_{N-1},3$从前到后所对应的 z 值分别为$z_1,z_2 \dots z_N$。其中

$$z_1=-e_a \quad z_N=e_a$$

由于e_a实际为一变量，进一步划分，设

$$z_{1a},z_{2a} \dots z_{Na}$$

所对应的是误差范围一半为e_a时的 z 值。有了这些值以后，可确定信号的下界满足

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{22} \\ z_{33} \\ z_{44} \\ z_{55} \\ \vdots \\ z_{NN} \end{bmatrix} = x_f$$

而信号的上界应满足

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{N1} \\ z_{(N-1)2} \\ z_{(N-2)3} \\ z_{(N-3)4} \\ z_{(N-4)5} \\ \vdots \\ z_{1N} \end{bmatrix} = x_f$$

如此一来就可得矩阵表示的线性方程组

信号上界：

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0 t_1 & \sin w_0 t_1 & \cos 2w_0 t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2} w_0 t_1 \\ 1 & \cos w_0 t_2 & \sin w_0 t_2 & \cos 2w_0 t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2} w_0 t_2 \\ 1 & \cos w_0 t_3 & \sin w_0 t_3 & \cos 2w_0 t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2} w_0 t_3 \\ 1 & \cos w_0 t_4 & \sin w_0 t_4 & \cos 2w_0 t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2} w_0 t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0 t_N & \sin w_0 t_N & \cos 2w_0 t_N & \cdots & \cos\frac{N}{2} w_0 t_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{f1} - z_{N1} \\ x_{f2} - z_{(N-1)2} \\ x_{f3} - z_{(N-2)3} \\ x_{f4} - z_{(N-4)5} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{1N} \end{bmatrix}$$

信号下界：

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_1 \\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_2 \\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_3 \\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \cos\frac{N}{2}w_0t_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{f1} - z_{11} \\ x_{f2} - z_{22} \\ x_{f3} - z_{33} \\ x_{f4} - z_{44} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{NN} \end{bmatrix}$$

这是 N 为偶数的情况。当 N 为奇数时则有

信号上界：

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_1 \\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_2 \\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_3 \\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{f1} - z_{N1} \\ x_{f2} - z_{(N-1)2} \\ x_{f3} - z_{(N-2)3} \\ x_{f4} - z_{(N-4)5} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{1N} \end{bmatrix}$$

信号下界

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0t_1 & \sin w_0t_1 & \cos 2w_0t_1 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_1 \\ 1 & \cos w_0t_2 & \sin w_0t_2 & \cos 2w_0t_2 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_2 \\ 1 & \cos w_0t_3 & \sin w_0t_3 & \cos 2w_0t_3 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_3 \\ 1 & \cos w_0t_4 & \sin w_0t_4 & \cos 2w_0t_4 & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos w_0t_N & \sin w_0t_N & \cos 2w_0t_N & \cdots & \sin\frac{N-1}{2}w_0t_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{f1} - z_{11} \\ x_{f2} - z_{22} \\ x_{f3} - z_{33} \\ x_{f4} - z_{44} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{NN} \end{bmatrix}$$

还设 N × N 的矩阵为 K，其行列式值为 A，并用 $\begin{bmatrix} x_{f1} - z_{11} \\ x_{f2} - z_{22} \\ x_{f3} - z_{33} \\ x_{f4} - z_{44} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{NN} \end{bmatrix}$(当计算下界时)或 $\begin{bmatrix} x_{f1} - z_{N1} \\ x_{f2} - z_{(N-1)2} \\ x_{f3} - z_{(N-2)3} \\ x_{f4} - z_{(N-4)5} \\ \vdots \\ x_{fN} - z_{1N} \end{bmatrix}$（当计算上界时）替换 K 的第 a 列形成$M_a$。则谐波的系数解为

$$a_0=\frac{|M_1|}{A}$$
$$l_1=\frac{|M_2|}{A}$$
$$l_2=\frac{|M_3|}{A}$$
$$\vdots$$
$$l_{N-1}=\frac{|M_N|}{A}$$

信号得以还原。该还原的方法，是将概率平均分布到各个误差范围内得出近似理论值的还原方法。当 N 足够大时并且各个误差范围，还原出的信号满足等式

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n-x_{fn})=0$$

信号上界的意义为，在第一个自变量测量值所对应的理论值向上移动误差范围的一半，之后向上移动的距离逐渐减少，并开始向下移动，并在最后一个自变量测量值所对应的理论值向下移动误差范围的一半。而信号下界则正好相反。信号的上界和下界都满足了在将测量误差平均地分布在整个误差范围的特性，应该是属于还原范围内最为合理的两条信号线（还原范围及信号上界和下界所夹的面积）。

下面来讨论第二种情况，测量的自变量值满足

$$t_{m_1}+k_1T=t_{m_2}\qquad k_1=1，2，3\ldots\qquad m_1=1，2，3\ldots\qquad m_2=1，2，3\ldots$$

$$t_{m_3}+k_2T=t_{m_4}\qquad k_2=1，2，3\ldots\qquad m_3=1，2，3\ldots\qquad m_4=1，2，3\ldots$$

$$t_{m_5}+k_3T=t_{m_6}\qquad k_3=1，2，3\ldots\qquad m_5=1，2，3\ldots\qquad m_6=1，2，3\ldots$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$t_{m_{2u+1}}+k_uT=t_{m_{2u+2}}\qquad k_u=1，2，3\ldots\qquad m_{2u+1}=1，2，3\ldots$$

$$m_{2u+2}=1，2，3\ldots u=1，2，3\cdots\cdots$$

u 为从t_1至t_N，满足加上正整数倍周期长度为另一测量自变量值得数且$0\le u<N$，$u_{max}=N-1$。

$$x_{fm_{2n+1}}\neq x_{fm_{2n+2}}$$

$$n=1，2，3\ldots$$

n 为可变正整数

这一情况中，两个或多个相隔整数倍周期的点测量值不同。但理论上，在一个周期信号中，相隔整数倍周期的点振幅应该是相同的。而如果用第一种情况中将概率平分到整个误差范围的方法进行还原，则不一定会让相隔整数倍周期的点还原到同一振幅。因此，对于相隔整数倍周期的点，需要用另外的方法单独还原。

如前文所说，当各个误差范围相同时，在理论近似中有

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n - x_{fn}) = 0$$

因此，当把相隔整数倍周期的点单独计算时，它们也应该满足这个规律。由于误差是呈正态分布的，要满足这一规律，需计算相隔整数倍周期的点的振幅为所有测量值的平均值。而当各个误差范围不同时，可用如下的线性方程组求解：设

$$t_1 + k_1T = t_2，t_2 + k_2T = t_3，……，t_n + k_nT = t_{n+1}$$

$$且x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x$$

则

$$x + k_1e_1 = x_{f1}$$

$$x + k_2e_2 = x_{f2}$$

$$x + k_3e_3 = x_{f3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x + k_ne_n = x_{fn}$$

（k_m与 e_m的积表示了测量值与理论值的偏差）

但由于未知数的数量比方程的数量多一个，该方程组不能求解。此时，可以近似地将所有 K 取平均值

$$\overline{K} = \frac{\sum_{a=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze_a}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{4e_a^2z^2}{9}}dz\right)}{n} = 0$$

将所有 K 取 0 时所得的方程组显然是谬误的。因此，将所有 K 取 0 后得到的方程组意义应为对于 x 有着 n 个不同的测量值。而 x 的值也应该计算为这些测量值的平均值。

计算过了平均值后，可将所有相隔整数倍周期的点的理论值近似为测量值的平均值。结合其他点的还原（使用第一种情况中的方法），同样可用有限重谐波的叠加还原信号，并列出一个线性方程组来解出各个谐波的系数。

第三章：一维运动的粒子在穿越方势垒时的能量本征方程

设有一维方势垒满足，朝其运动的一个粒子具有能量 E，E 小于势能垒中的势能。

$$(x) = \begin{cases} V_0(0 \le x \le a) \\ 0(x < 0 \text{ 或 } x > a) \end{cases}$$

量子力学上，对于这种势垒经常研究的是势垒的反射和透射特性。

在势垒外，粒子的能量本征方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

它的解可取为$\psi(x) = e^{\pm igx}$，其中$g = \sqrt{2mE}/\hbar$（$\hbar$为约化普朗克常量，为 h/2π)。这两个解是线性无关的。

根据解的形式，可规定粒子沿 x 轴正方向入射势垒时，入射波为e^{igx}，而反射波为e^{-igx}。

可得$\Psi(x) = \begin{cases} e^{igx} + Fe^{-igx} & x < 0 \\ Te^{igx} & x > a \end{cases}$

在势垒内，能量本征方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi-\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0-E\right)\psi=0$$

其通解形式为 $Ae^{Gx}+Be^{-Gx}$， $G=\frac{\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}}{\hbar}$ 。

可证明，当粒子的运动路径局限在一个维度中时，其波函数及波函数导数在势能及其变化量有限的变化边界处连续。可设势能的函数为

$$\mathrm{V(x)}=\begin{cases}\mathrm{V_1} & \mathrm{x}>s\\ \mathrm{V_2} & \mathrm{x}<s\end{cases}$$

S 为 x 坐标轴上的坐标量。易得粒子的薛定谔方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\psi(\mathrm{x})=-\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}[\mathrm{E}-\mathrm{V(x)}]\psi(\mathrm{x})$$

在 s 的邻域对该方程进行积分可得到

$$\lim_{\mathrm{z}\to 0}[\psi'(\mathrm{s+z})-\psi'(\mathrm{s-z})]=-\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}\lim_{\mathrm{z}\to 0}\int_{\mathrm{a-z}}^{\mathrm{a+z}}[\mathrm{E}-\mathrm{V(x)}]\psi(\mathrm{x})$$

由于$[\mathrm{E}-\mathrm{V(x)}]\psi(\mathrm{x})$有限，上面等式右边的积分值趋于 0。所以

$$\psi'(\mathrm{s+z})=\psi'(\mathrm{s-z})$$

即证明了$\psi(\mathrm{x})$的导数在 s 处连续；由于导数连续$\psi(\mathrm{x})$也是连续的。

在一维势垒的情况中，可用已证明的上述定理推定，在 x 为 0 及 a 时波函数及其倒数连续。

由于 x=0 时波函数与其导数连续，可得

$$1+R=A+B$$

$$\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}}(1-\mathrm{F})+\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

又可得

$$A=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{ig}{G}\right)+F\left(1-\frac{ig}{G}\right)\right],\quad B=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{ig}{G}\right)+F\left(1+\frac{ig}{G}\right)\right]。$$

相似地，由于 x=a 时波函数和其导数连续，

$$Ae^{Ga}+Be^{-Ga}=Te^{iga}$$

$$Ae^{Ga}-Be^{-Ga}=\frac{ig}{G}e^{iga}$$

$$A=\frac{T}{2}\left(1+\frac{ig}{G}\right)e^{iga-Ga}$$

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{T}}{2}(1-\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}})\mathrm{e}^{\mathrm{iga+Ga}}$$

联立两个求 A 和两个求 B 的等式，可去掉 A 和 B 得

$$\left(1-\frac{ig}{G}\right)+F\left(1-\frac{ig}{G}\right)=T\left(1+\frac{ig}{G}\right)e^{iga-Ga}$$

$$\left(1-\frac{ig}{G}\right)+F\left(1+\frac{ig}{G}\right)=T\left(1-\frac{ig}{G}\right)e^{iga+Ga}$$

消去 F，可得

$$\frac{Te^{iga-Ga}-1}{Te^{iga+Ga}-1}=\left(\frac{1-\frac{ig}{G}}{1+\frac{ig}{G}}\right)^2$$

解得

$$\frac{Te^{iga-Ga}-1}{Te^{iga+Ga}-1}=\left(\frac{1-\frac{ig}{G}}{1+\frac{ig}{G}}\right)^2$$

$$\mathrm{Te}^{\mathrm{iga}}=\frac{-2\mathrm{ig}/\mathrm{G}}{\left[1-\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{G}}\right)^2\right]\mathrm{shGa}-2\mathrm{i}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{G}}\mathrm{chGa}}=\Theta$$

$$\mathrm{T}=\frac{\Theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{iga}}}$$

$$|T|^2=\frac{4g^2G^2}{\left(g^2-G^2\right)sh^2Ga+4g^2G^2ch^2Ga}$$

即为势垒的透射系数。
相似地消去 T 可解得

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{Ga}}=\frac{1+\frac{\mathrm{F}(1+\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}})}{(1-\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}})}}{1+\frac{\mathrm{F}(1-\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}})}{(1+\frac{\mathrm{ig}}{\mathrm{G}})}}$$

$$\mathrm{Fe}^{\mathrm{iga}}=\frac{\left(1+\frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{G}^2}\right)\mathrm{shGa}}{\left(1+\frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{G}^2}\right)\mathrm{shGa}-2\mathrm{iGg}}=\epsilon$$

$$\mathrm{T}=\frac{\epsilon}{\mathrm{e}^{\mathrm{iga}}}$$

$$|F|^2=\frac{\left(g^2+G^2\right)sh^2Ga}{\left(g^2+G^2\right)^2sh^2Ga+4g^2G^2}$$

为势垒的反射系数。从运算中可看出，在 T 和 F（以及透射系数和反射系数）的计算中都需要获知势垒的宽度和强度。但运用信号还原的方法，可在不知道这两个参数的情况下对

于粒子的波函数进行计算。
在 x<0 时

$$\psi\left(x\right)=e^{igx}+Fe^{-igx}$$

$$=\left(\cos gx+i\sin gx\right)+F\left(\cos gx-i\sin gx\right)$$

$$=\left(F+1\right)\cos gx+i\left(1-F\right)\sin gx$$

在 x<a 时

$$\psi\left(x\right)=Te^{igx}$$

$$=T\cos gx+iT\sin gx$$

可看出粒子的波函数为一个复数域上的周期信号。粒子的波函数表示了粒子的概率振幅，而多个概率波的相干叠加性为：空间中任何一点的总体位移幅度为各个波在这一点的位移幅度求和。因此，如果有多个能量各不相同但均小于势垒中的势能的全同粒子（这些粒子没有相互作用），则可设波函数为

$$\psi(x)=\sum_{a=1}^{n}[(F_a+1)\cos g_a x+i(1-F_a)\sin g_a x]$$

$$g_a=\frac{\sqrt{2mE_a}}{\hbar}\ n\text{为粒子总数}$$

若已知 n 个 x 值得概率振幅，则可列线性方程组以求 F 的值

$$\sum_{a=1}^{n}[(F_a+1)\cos g_a x_1+i(1-F_a)\sin g_a x_1]=A_1$$

$$\sum_{a=1}^{n}[(F_a+1)\cos g_a x_2+i(1-F_a)\sin g_a x_2]=A_2$$

.

.

.

$$\sum_{a=1}^{n}[(F_a+1)\cos g_a x_n+i(1-F_a)\sin g_a x_n]=A_n$$

其中 A 为振幅。得到这一方程组后，可通过前文中所提到的矩阵解出各个 F+1 的值或 F-1 的值。

类似地，在求 T 时有

$$\psi(x)=\sum_{a=1}^{n}[T\cos g_a x+iT\sin g_a x]$$

通过列线性方程组

$$\sum_{a=1}^{n}[T_a\cos g_a x_1+iT_a\sin g_a x_1]=A_1$$

$$\sum_{a=1}^{n}[T_a \cos g_a x_2 + iT_a \sin g_a x_2] = A_2$$

.

.

.

$$\sum_{a=1}^{n}[T_a \cos g_a x_n + iT_a \sin g_a x_n] = A_n$$

即可求出对于不同能量的 T 值。

但是因为实物粒子能量本征函数的概率振幅为物理上没有意义的不可观测量，要得知所有测量点上的概率波幅很难实现，因此需要用一些手段来减少所需的条件。波函数概率振幅模的平方表示的是粒子出现在空间中某一点的概率密度，是实际上可以观测的量。对于单个粒子，确定时间点 M，在 M 时粒子应已经穿过势垒或被势垒反弹。进行多次入射试验，每一次在 M 时测量粒子出现在势垒的左侧还是右侧。在试验次数足够多后，设出现在势垒左侧的次数和出现在势垒右侧的次数比为 a:b，则可算出透射系数和反射系数。这是因为有

$$|T|^2 + |F|^2 = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{|T|^2}{|F|^2}$$

可得

$$|T|^2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|F|^2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

可算得在势垒左侧和右侧能量本征方程的概率振幅绝对值的平方对能量本征函数所在的空间积分所得的值为在不知道势垒的强度和宽度时可以求得的值，大小为

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}(x < 0)$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}(x > a)$$

若可以抓到概率振幅虚部为 0 的点，以该点作为粒子的初态，则粒子在任一时刻的概率波幅都可以确定（因为薛定谔方程只含有对于实践的一次偏微分）。

实物自由粒子在三维空间中以动量表象的傅里叶变换表示的波函数为

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \varphi(p)e^{\frac{i(p\cdot r - Et)}{\hbar}}d^3 p$$

初态表示为

$$\Psi(r,0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \varphi(p)e^{\frac{ip\cdot r}{\hbar}}d^3 p$$

其逆傅里叶变换为

$$\Psi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \varphi(r,0)e^{\frac{-ip\cdot r}{\hbar}}d^3 p$$

因此

$$\Psi(r,t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int d^3r'\int d^3pe^{\frac{i[p\cdot(r-r')-E(t-t')]}{\hbar}}\psi(r',t')$$

$$=\int d^3rG(r,t;r't')\psi(r',t')$$

$$G(r,t;r't')=\left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m}{2\hbar}\frac{(r-r')^2}{(t-t')}\right]$$

易得

$$\lim_{t\to t'}G(r,t;r't')=\delta(r-r')$$

所以

$$\psi(r,t)=G(r,t;r'_0,t')$$

r'_0为粒子在初始时刻 t'的位置

换为一维运动的形式即为

$$\psi(x,t)=G(x,t;x'_0,t')$$

自由粒子的可归一化波函数为

$$\Psi(r,t)=e^{\frac{i(p\cdot r-Et)}{\hbar}}$$

分离为能量本征函数和时间因子为

$$\Psi(r,t)=\psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

能量本征函数的概率波幅为

$$\psi(r)=\frac{\Psi(r,t)}{e^{-iEt/\hbar}}$$

可注意到含时波函数与能量本征方程的概率振幅是不同的。

根据以上结论，还须已知粒子的初态，即可以任意地在一定范围内得出 n 个测量的点的概率振幅，以此进行信号还原。而对于势垒左侧和右侧的能量本征函数，对于需要得知的条件有着不同的要求。

对于势垒左侧（x<0）的能量本征函数，需要确定位于 x 轴负半轴某一点坐标及其概率波幅。设该点坐标为-j,概率振幅为 I 所对应的时间为 t’，可求得 n 个粒子能量本征态的入射波概率波幅为

$$A_{1r}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_1-t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_1+j)^2}{(t_1-t')}\right]}{e^{-iE_lt_1/\hbar}}$$

$$A_{2r}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_2-t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_{tl}}{2\hbar}\frac{(x_2+j)^2}{(t_2-t')}\right]}{e^{-iE_lt_2/\hbar}}$$

$$\vdots$$

$$A_{nr}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_n-t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_n+j)^2}{(t_n-t')}\right]}{e^{-iE_lt_n/\hbar}}$$

$$-j<x_1<x_2<\cdots<x_n<0$$

E_l为第 l 个粒子的能量

m_l为第 l 个粒子的质量

$$t_a = \frac{x_a + j}{\left(\frac{p}{m}\right)} = \frac{x_a + j}{v}$$

a=1,2,3…n

反射波在-j 制造的波幅应为

$$A_{or} = I - \sum_{t=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2mE_t}\cdot(-j)-E_t t\right)}{\hbar}}$$

在完全反射的情况下，单个粒子反射波在 x,t 形成的波幅为

$$G(x,t;x't') = \left[\frac{m_t}{2\pi i\hbar(t'-t)}\right]^{3/2} \exp\left[i\frac{m_t}{2\hbar}\frac{(x_0'-x)^2}{(t'-t)}\right]$$

而多个粒子的能量本征函数振幅为

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_1-t')}\right]^{3/2} \exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_o'-x)^2}{(t-t')}\right]}{e^{-iE_l t/\hbar}}$$

由此可知自由完全反射粒子的波函数为

$$\Psi(r,t) = e^{\frac{-i(p\cdot r-Et)}{\hbar}}$$

由于有系数 F，这一波函数有所变化。可得

$$\sum_{l=1}^{n} Fe^{-i\sqrt{2mE_l}x/\hbar} = I - \sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}$$

这样可以知道不完全反射反射波在 x,t 所形成的能量本征态波幅为

$$A_{1f} = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t'-t_1)}\right]^{3/2} \exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(-x_1+j)^2}{(t'-t_1)}\right]}{e^{-iE_l t_1/\hbar}}\right) \cdot \frac{I - \sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{-i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}$$

$$A_{2f} = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t-t_2)}\right]^{3/2} \exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(-x_2+j)^2}{(t'-t_2)}\right]}{e^{-iE_l t_2/\hbar}}\right) \cdot \frac{I - \sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{-i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}$$

$$\vdots$$

$$A_{nf} = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t'-t_n)}\right]^{3/2} \exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(-x_n+j)^2}{(t'-t_n)}\right]}{e^{-iE_l t_n/\hbar}}\right) \cdot \frac{I - \sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{-i\left(\sqrt{2m_lE_l}\cdot(-j)-E_l t\right)}{\hbar}}}$$

则可得

$$A_d = A_{df} + A_{dr}$$
$$d = 1,2,3 \ldots n$$

用这一方法求出 n 个概率振幅，则可进行信号还原的计算，计算出对于不同能量 F 的值。

对于势垒右侧(x>a)的能量本征函数，需要在不知道势垒宽度的情况下，得知一个 x 值 J，满足 J 是在大于 a 的 x 值中第一个使概率振幅为正实值的量。可求出在 J 几率振幅为

$$\sum_{l=1}^{n}|T_l| = \sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{b_l}{\sqrt{a_l^2 + b_l^2}}}$$

b_l和a_l需要用各个粒子单独做实验，在多次试验的情况下测量时刻 M 粒子出现在势垒右侧和左侧的次数比。

依然可用$G(x,t;J,t')$计算 n 个概率振幅以进行信号还原。具体的计算为

$$A_1 = \sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_1 - t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_1 - J)^2}{(t_1 - t')}\right]}{e^{-iE_l t_1/\hbar}}\cdot\frac{\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{b_l}{\sqrt{a_l^2 + b_l^2}}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_l E_l}\cdot J - E_l t\right)}{\hbar}}}$$

$$A_2 = \sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_2 - t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_2 - J)^2}{(t_2 - t')}\right]}{e^{-iE_l t_2/\hbar}}\cdot\frac{\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{b_l}{\sqrt{a_l^2 + b_l^2}}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_l E_l}\cdot J - E_l t\right)}{\hbar}}}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{m_l}{2\pi i\hbar(t_n - t')}\right]^{3/2}\exp\left[i\frac{m_l}{2\hbar}\frac{(x_n - J)^2}{(t_n - t')}\right]}{e^{-iE_l t_n/\hbar}}\cdot\frac{\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{b_l}{\sqrt{a_l^2 + b_l^2}}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{i\left(\sqrt{2m_l E_l}\cdot J - E_l t\right)}{\hbar}}}$$

类似地，求得得了振幅，就可用用解前文列出的线性方程组的方法进行信号还原，求出不同能量所对应的 T 值，以还原能量本征函数。

参考文献：

[1][美]R.柯朗 什么是数学[M] 上海.2008 复旦大学出版社

[2]秦曾复 余跃年 高等数学讲义[M] 上海.1995 复旦大学出版社

[3]曾谨言 量子物理教程[M] 北京.2003 科学出版社